$5^η$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

41 .

Σε κύκλο (O, R) προεκτείνουμε μία διάμετρο του AB εκατέρωθεν των A και B και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα ΒΓ = ΑΔ = R . Έστω ΔΕΜ τέμνουσα του κύκλου τέτοια ώστε $ΔΜ = R\sqrt{7}$

i) Να αποδείξετε ότι $ΓΜ = R\sqrt{3}$

ii) Να αποδείξετε ότι το ΓΜ είναι εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο

iii) Να υπολογίσετε το ΔΕ συναρτήσει του R

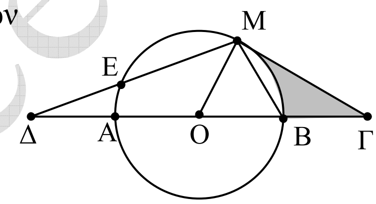
iv) Να υπολογίσετε συναρτήσει του R τα εμβαδά των τριγώνων ΟΜΓ και ΔΜΓ

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου ΜΒΓ (γκρίζα περιοχή) συναρτήσει του R

Προτεινόμενη λύση

i)

Στο τρίγωνο ΔΜΓ από το $1^ο$ θεώρημα διαμέσων



έχουμε ότι $ΜΔ^2 + ΓΜ^2 = 2ΜΟ^2 + \frac{ΔΓ^2}{2} \Leftrightarrow$

$7R^2 + ΓΜ^2 = 2\,R^2 + \frac{16R^2}{2} \Leftrightarrow$

$ΓΜ = R\sqrt{3}$

ii)

Είναι $ΓΜ^2 = 3R^2$ και $ΓΒ\cdot ΓΑ = R\cdot 3R = 3R^2$ άρα $ΓΜ^2 = ΓΒ\cdot ΓΑ$

Επομένως το ΓΜ είναι εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο

iii)

$ΔΕ \cdot ΔΜ = ΔΑ\cdot ΔΒ \Leftrightarrow R\sqrt{7}\,ΔΕ = R\cdot 3R \Leftrightarrow$

$$ΔΕ = \frac{3R\sqrt{7}}{7}$$

iv)

Επειδή ΓΜ εφαπτόμενο τμήμα το τρίγωνο ΟΜΓ είναι ορθογώνιο στο Μ άρα

$(ΟΜΓ) = \frac{1}{2} ΜΟ \cdot ΜΓ = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ τετραγωνικές μονάδες

Στο τρίγωνο ΔΜΓ η ΟΜ είναι διάμεσος οπότε (ΔΜΟ) = (ΜΟΓ) συνεπώς

$(ΔΜΓ) = 2(ΜΟΓ) = R^2\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες

v)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΟΓ για τη διάμεσο ΜΒ ισχύει ΜΒ = $\frac{ΟΓ}{2}$ = R

άρα το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο οπότε $M\hat{O}B = 60^o$

Το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου ΜΒΓ προκύπτει αν από το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τομέα $O\overset{\frown}{MB}$ επομένως

$$E_{ζητούμενο} = (ΟΜΓ) - (O\overset{\frown}{MB}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2 60^o}{360^o} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6} \quad τ.μ$$

42 .

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) με ΑΒ = $R\sqrt{2}$ και την γωνία $\hat{B} = 60^o$.

i) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = $R\sqrt{3}$

ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΚ συναρτήσει του R

iii) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του R

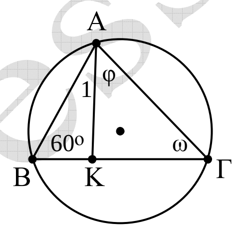
iv) Να βρείτε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ συναρτήσει του R

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται μεταξύ του κύκλου (Ο , R) και του τριγώνου ΑΒΓ

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού $\hat{B} = 60^o$ θα είναι $\overset{\frown}{A\Gamma} = 120^o$ επομένως



$A\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

ii)

Αφού $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$ θα είναι $\overset{\frown}{BA} = 90^o$

Άρα $\hat{\omega} = 45^o = \varphi$

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΓ και το πυθαγόρειο προκύπτει ότι

$AK = K\Gamma = R\frac{\sqrt{6}}{2}$

Παρατήρηση : Ποιο εύκολα θα μπορούσαμε να πούμε ότι

$\eta\mu 60^o = \frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AK = AB\eta\mu 60^o = R\frac{\sqrt{6}}{2}$

iii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΚ είναι $\hat{A}_1 = 30^o$ άρα $BK = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Τώρα $B\Gamma = BK + K\Gamma = \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R\sqrt{6}}{2} = \frac{R(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$ μετά από αυτά

Η περίμετρος Ρ του ΑΒΓ είναι ίση με $P = R\sqrt{3} + R\sqrt{2} + \frac{R(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$

και το εμβαδόν του $E = \frac{1}{2}B\Gamma\, AK = \frac{R^2\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{8}$ τετραγωνικές μονάδες

43 .

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με

ΑΒ // ΓΔ , ΑΒ < ΓΔ , ΑΒ = 4 , ΑΔ = 3, ΒΓ = 5 , $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^o$

Να υπολογίσετε

i) Την προβολή της ΒΓ πάνω στην ΔΓ

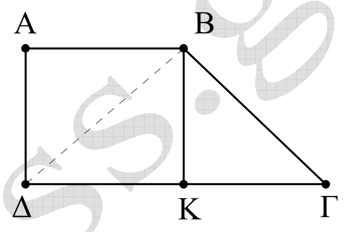
ii) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ

iv) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\widehat{B}\Gamma$ είναι αμβλεία

Προτεινόμενη λύση

i)



Φέρνω την ΒΚ $\perp$ ΔΓ τότε , η προβολή της ΒΓ στην ΔΓ είναι το τμήμα ΚΓ .

Το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο οπότε

ΒΚ = ΑΔ = 3 και ΔΚ = ΑΒ = 4

από πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ έχουμε

$K\Gamma^2 = B\Gamma^2 - BK^2 = 25 - 9 = 16$ άρα ΚΓ = 4

ii)

ΔΓ = ΔΚ + ΚΓ = 8 οπότε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσο με

$(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{(AB + \Delta\Gamma)A\Delta}{2} = 18$ τετραγωνικές μονάδες

iii)

$(B\Delta\Gamma) = \dfrac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot BK = 12$ τετραγωνικές μονάδες

iv)

Στο τρίγωνο ΒΔΓ η ΒΚ είναι ύψος και διάμεσος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές οπότε ΒΔ = ΒΓ = 5

$\Delta\Gamma^2 = 64$ και $B\Delta^2 + B\Gamma^2 = 50$ άρα $\Delta\Gamma^2 > B\Delta^2 + B\Gamma^2$ οπότε $\Delta\widehat{B}\Gamma > 90^o$

44.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο αυτού .

Αν $ΘΑ = \frac{\sqrt{139}}{3}$, $ΘΒ = \frac{\sqrt{91}}{3}$ και $ΘΓ = \frac{\sqrt{19}}{3}$ να υπολογιστούν .

i) Οι πλευρές του ΑΒΓ

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

iii) Οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ .

iv) Τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ

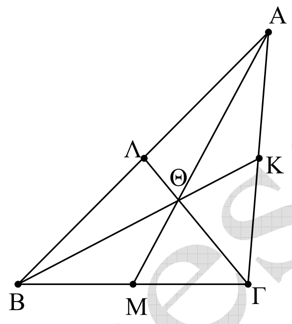
Προτεινόμενη λύση

i)

$ΘΜ = \frac{1}{2}ΘΑ = \frac{\sqrt{139}}{6}$

$ΘΚ = \frac{1}{2}ΘΒ = \frac{\sqrt{91}}{6}$

$ΘΛ = \frac{1}{2}ΘΓ = \frac{\sqrt{19}}{6}$



Από το 1^{ο} θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΒΘΓ βρίσκω ΒΓ = 3

Ομοίως από τα τρίγωνα ΑΘΓ και ΑΘΒ βρίσκουμε ΑΓ = 5 και ΑΒ = 7

ii)

Από τον τύπο του Ήρωνα βρίσκουμε ότι

$$Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

iii)

Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου τότε

$$Ε = \frac{αβγ}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ και}$$

Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου τότε

$$Ε = τ\cdot ρ \Leftrightarrow ρ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

iv)

$$Ε = \frac{1}{2}α\cdot υ_α \Leftrightarrow \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot υα \Leftrightarrow υ_α = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

ομοίως $υ_β = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και $υ_γ = \frac{15\sqrt{3}}{14}$

45.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R με ΒΓ = α , ΑΓ = β και

ΑΒ = $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}$.

i) Δείξτε ότι $\hat{\Gamma} = 60^o$

ii) $R = \sqrt{\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{3}}$

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή την ΑΒ.

Προτεινόμενη λύση

i)

Νόμος συνημιτόνων για την πλευρά ΑΒ

$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2A\Gamma\cdot B\Gamma\,\text{συν}\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \text{συν}\hat{\Gamma} = \dfrac{1}{2}$ και

Επειδή η $\hat{\Gamma}$ είναι γωνία τριγώνου θα είναι $\hat{\Gamma} = 60^o$

ii)

$E = \dfrac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ημ}\hat{\Gamma} \Leftrightarrow E = \dfrac{\alpha\beta\sqrt{3}}{4}$ **(1)** και

$E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{\alpha\beta\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{\gamma}{\sqrt{3}}$

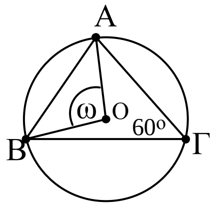
$$R = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{3}}$$

iii)

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από

Το εμβαδό του τομέα $O\overset{\frown}{AB}$ αφαιρέσουμε

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ



Είναι φανερό ότι η γωνία $\hat{\omega}$ του τομέα είναι

$\hat{\omega} = 120^o$ οπότε

$$E_{\text{ζητούμενο}} = (O\overset{\frown}{AB}) - (AOB) = \frac{\pi R^2 120^o}{360^o} - \frac{1}{2}R\cdot R\,\text{ημ}120^o =$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$ τετραγωνικές μονάδες

46 .

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Φέρουμε την διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας Γ και από το Α την κάθετη ΑΜ στην διχοτόμο αυτή .Δείξτε ότι

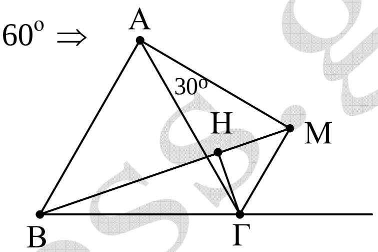
i) $(ΒΓΜ) = (ΑΓΜ) = \dfrac{α^2\sqrt{3}}{8}$

ii) Αν ΓΗ ύψος του τριγώνου ΒΓΜ τότε $ΓΗ = \dfrac{α\sqrt{21}}{14}$.

iii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΜ

Προτεινόμενη λύση

i)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε $Α\hat{Γ}Μ = 60^o \Rightarrow$

$Γ\hat{Α}Μ = 30^o \Rightarrow ΓΜ = \dfrac{ΑΓ}{2} = \dfrac{α}{2}$

Είναι $Β\hat{Γ}Μ = 120^o$ και $Α\hat{Γ}Μ = 60^o$

Άρα $Β\hat{Γ}Μ + Α\hat{Γ}Μ = 180^o$

Οπότε $\dfrac{(ΒΓΜ)}{(ΑΓΜ)} = \dfrac{ΒΓ\cdot ΓΜ}{ΑΓ\cdot ΓΜ} = 1 \Rightarrow (ΒΓΜ) = (ΑΓΜ)$

Όμως $(ΒΓΜ) = \dfrac{1}{2}ΒΓ\cdot ΓΜ\,ημ120^o = \dfrac{1}{2}α\cdot\dfrac{α}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{α^2\sqrt{3}}{8}$ άρα

$(ΒΓΜ) = (ΑΓΜ) = \dfrac{α^2\sqrt{3}}{8}$

ii) $ΒΜ^2 = ΒΓ^2 + ΓΜ^2 – 2ΒΓ\cdot ΓΜσυν\,Β\hat{Γ}Μ$

$= α^2 + \dfrac{α^2}{4} - 2α\cdot\dfrac{α}{2}συν120^o = \dfrac{7α^2}{4}$

Άρα $ΒΜ = \dfrac{α\sqrt{7}}{2}$.

$(ΒΓΜ) = \dfrac{1}{2}ΒΜ\cdot ΓΗ \Leftrightarrow \dfrac{α^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{α\sqrt{7}}{2}\cdot ΓΗ \Leftrightarrow$

$ΓΗ = \dfrac{α\sqrt{21}}{14}$

iii)

$(ΑΒΓΜ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΜ) = \dfrac{α^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{α^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{3α^2\sqrt{3}}{8}$

47.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε των ΑΒ , ΑΓ έτσι ώστε

$ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{3}{4}ΑΓ$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Η . Δείξτε ότι

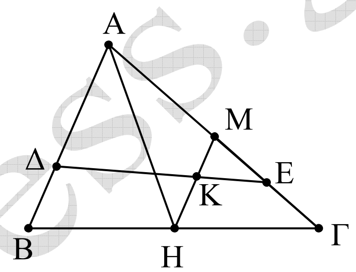
i) $(ΑΒΗ) = (ΒΔΕΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.

ii) $(ΜΗΓ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

iii) Αν η ΜΗ τέμνει το ΔΕ στο Κ να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών $\frac{(ΕΜΚ)}{(ΕΑΔ)}$

Προτεινόμενη λύση

i)



Αφού Μ μέσο του ΑΓ και ΜΗ// ΑΒ

θα είναι Η μέσο του ΒΓ

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΗ είναι διάμεσος άρα

$(ΑΒΗ) = (ΑΗΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$ (1)

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν την

γωνία $\widehat{Α}$ κοινή οπότε

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{2}{3}ΑΒ \cdot \frac{3}{4}ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{1}{2} \text{ άρα } (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$$

Τότε $(ΒΔΕΓ) = (ΑΒΓ) – (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $(ΑΒΗ) = (ΒΔΕΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$

ii)

Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΜΗ η γωνία $\widehat{Α}$ είναι κοινή άρα

$$\frac{(ΓΜΗ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΓΜ \cdot ΓΗ}{ΑΓ \cdot ΒΓ} = \frac{\frac{1}{2}ΑΓ \cdot \frac{1}{2}ΒΓ}{ΑΓ \cdot ΒΓ} = \frac{1}{4} \text{ άρα } (ΜΗΓ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ).$$

iii)

Επειδή ΜΚ // ΑΔ τα τρίγωνα ΕΚΜ και ΕΑΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$λ = \frac{ΕΜ}{ΕΑ} = \frac{\frac{1}{4}ΑΓ}{\frac{3}{4}ΑΓ} = \frac{1}{3} \text{ και αφού } \frac{(ΕΜΚ)}{(ΕΑΔ)} = λ^2 \text{ θα είναι } \frac{(ΕΜΚ)}{(ΕΑΔ)} = \frac{1}{9}$$

48

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 4 και σημείο Σ της ΑΒ ώστε ΑΣ = 1 .

Να υπολογίσετε

i) Τα μήκη των πλευρών ΣΔ και ΣΓ του τριγώνου ΣΓΔ

ii) Την απόσταση του Δ από την ΣΓ

iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΣΓΔ

iv) Την απόσταση του Γ από την ΔΣ

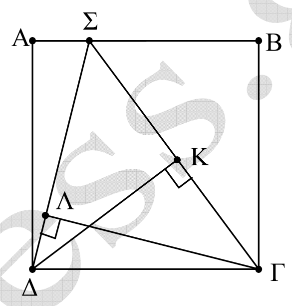
v) Το εμβαδόν του περιγεγραμμένου στο τετράγωνο κύκλου

Προτεινόμενη λύση

i)

Από το Πυθαγόρειο στα τρίγωνα ΑΣΔ και ΣΒΓ

βρίσκουμε $ΣΔ = \sqrt{17}$, $ΣΓ = 5$



ii)

Αν ΔΚ είναι η απόσταση του Δ από την ΣΓ τότε

Από την γενίκευση του Πυθαγορείου στο ΣΔΓ

έχουμε

$ΣΔ^2 = ΔΓ^2 + ΣΓ^2 - 2ΣΓΚΓ \Leftrightarrow$

$$17 = 16 + 25 - 10ΚΓ \quad \Leftrightarrow ΚΓ = \frac{12}{5}$$

Τώρα από Πυθαγόρειο στο ΔΚΓ έχουμε $ΔΚ = \frac{16}{5}$

Σημείωση : θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του μήκους του ύψους

iii)

$(ΣΔΓ) = \frac{1}{2}ΣΓ\cdot ΔΚ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot \frac{16}{5} = 8$ τετραγωνικές μονάδες

iv)

Αν ΓΛ είναι η απόσταση του Γ από την ΔΣ τότε

$(ΣΔΓ) = \frac{1}{2}ΣΔ\cdot ΓΛ \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}\sqrt{17}\cdot ΓΛ \Leftrightarrow ΓΛ = \frac{16\sqrt{17}}{17}$

iv)

Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου στο τετράγωνο κύκλου τότε

$λ_4 = R\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 = R\sqrt{2} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{2}$

επομένως το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου είναι ίσο με

$Ε = πR^2 = 8π$ τετραγωνικές μονάδες .

49.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με μήκη πλευρών ΑΒ = R και ΑΓ= R $\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, R$\sqrt{3}$) που τέμνονται και στο Δ

Να υπολογίσετε :

i) Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R

ii) Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ

iii) Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R

iv) Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R .

v) Το μήκος της κοινής χορδής ΑΔ συναρτήσει του R

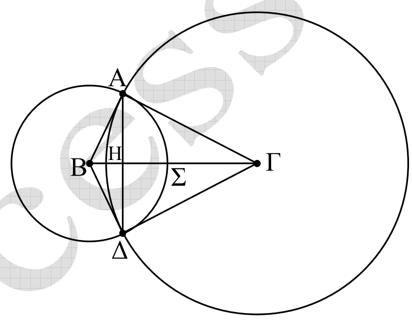
Προτεινόμενη λύση

i)

Από το Πυθαγόρειο βρίσκουμε

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$ άρα

$B\Gamma = 2R$



ii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$AB = R = \dfrac{B\Gamma}{2}$ άρα $B\hat{\Gamma}A = 30^o$ οπότε

$A\hat{B}\Gamma = 60^o$

iii)

Είναι προφανές ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ είναι ίσα άρα

$(AB\Delta\Gamma) = 2(AB\Gamma) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = R^2\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες

iv)

Το κοινό μέρος των δύο κύκλων έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων ΑΣΔ και ΑΗΔ όμως

$(A\Sigma\Delta) = (B\,\overset{\frown}{A\Sigma\Delta}) - (AB\Delta) = \dfrac{\pi R^2 120^o}{360^o} - \dfrac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \eta\mu 120^o = \dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$(AH\Delta) = (\Gamma\,\overset{\frown}{AH\Delta}) - (A\Gamma\Delta) = \dfrac{\pi \cdot 3R^2 60^o}{360^o} - \dfrac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} \cdot \eta\mu 120^o = \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Άρα Ε ζητούμενο = $\dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5\pi R^2}{6} - R^2\sqrt{3}$

v)

Αφού $A\hat{B}\Delta = 120^o$ θα είναι $A\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

50.

Έστω κύκλος (Ο, R) και μία διάμετρος του ΒΓ . Από σημείο Α του κύκλου φέρνουμε τμήμα $ΑΔ \perp ΒΓ$ και από σημείο Ε της προέκτασης της ΒΓ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΕΗ έτσι ώστε $ΕΗ = \lambda_3$. Αν ΑΒ = 6 και (ΑΒΓ) = 24

i) Δείξτε ότι R = 5

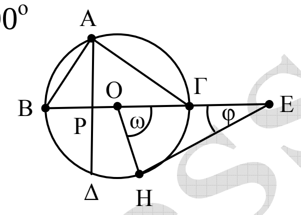
ii) Να υπολογίσετε το τμήμα ΑΔ

iii) Δείξτε ότι ΓΕ = R και υπολογίστε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτογράμμου τριγώνου ΓΕΗ.

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή ΒΓ διάμετρος θα είναι $Β\widehat{Α}Γ = 90^o$



Όμως $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ \Leftrightarrow$

$$24 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot ΑΓ \Leftrightarrow ΑΓ = 8$$

Από το Πυθαγόρειο στο ΑΒΓ βρίσκουμε ότι ΒΓ = 10 άρα R = 5

ii)

Η ακτίνα ΒΟ σαν κάθετη στην χορδή ΑΔ θα είναι μεσοκάθετος στην ΑΔ οπότε ΑΔ = 2ΑΡ

Γνωρίζουμε ότι $ΑΒ^2 = ΒΡ \cdot ΒΓ \Leftrightarrow$

$$36 = 10ΒΡ \Leftrightarrow ΒΡ = \frac{18}{5} \text{ οπότε } ΡΓ = 10 - \frac{18}{5} = \frac{32}{5}$$

Ακόμα $ΑΡ^2 = ΒΡ \cdot ΡΓ = \frac{576}{25}$ άρα $ΑΡ = \frac{24}{5}$ και επομένως $ΑΔ = \frac{48}{5}$

iii)

$$ΕΗ^2 = ΕΓ \cdot ΕΒ \Leftrightarrow (R\sqrt{3})^2 = ΕΓ(ΕΓ + ΒΓ) \Leftrightarrow$$

$$(5\sqrt{3})^2 = ΕΓ(ΕΓ + 10) \Leftrightarrow$$

$$ΕΓ^2 + 10ΕΓ - 75 = 0 \text{ απ' όπου προκύπτει ότι } ΕΓ = 5 = R$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΗΕ είναι $ΟΗ = 5 = \frac{ΟΕ}{2}$ άρα $\hat{φ} = 30^o$ οπότε $\hat{ω} = 60^o$

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΓΗ}$ είναι ίσο με $\ell_{\overset{\frown}{ΓΗ}} = \frac{\pi R \mu^o}{180^o} = \frac{5\pi}{3}$ συνεπώς

Η περίμετρος Π του μεικτογράμμου τριγώνου ΕΓΗ είναι ίση με

$\Pi = \ell_{\overset{\frown}{\Gamma H}} + \Gamma E + EH = \dfrac{5\pi}{3} + 5 + 5\sqrt{3}$ μονάδες

Και το εμβαδόν Ε είναι ίσο με

$E = (OEH) - (O\overset{\frown}{\Gamma H}) = \dfrac{1}{2} OH \cdot HE - \dfrac{\pi R^2 \mu^o}{360^o} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2} - \dfrac{25\pi}{6}$ τετραγωνικές μονάδες